

弾塑性力学における下負荷面モデルの材料定数の推定

Estimation of material parameters in the subloading surface model for elastoplastic mechanics

○正 西久保 裕康^{*1}, 張 広志^{*1}, 米 大海^{*1}
Hiroyasu NISHIKUBO^{*1}, Guangzhi ZHANG^{*1} and Dahai MI^{*1}

^{*1} 計測エンジニアリングシステム株式会社 KEISOKU ENGINEERING SYSTEM CO., LTD.

Abstract

Accurate prediction of plastic processing is important for the optimization of structural design and manufacturing processes. Estimation of material parameters is the important factor that affects the accuracy of finite element analysis (FEA) results. In this paper, we focus on the subloading surface model of elastoplastic mechanics and develop the new estimation model for material parameters using general-purpose CAE software. In this model, we estimate the material parameters of the subloading surface model that match the stress-strain curve of the experimental results as closely as possible. The method for estimating material parameters uses the optimization algorithm, which compares the experimental stress-strain curve with the analytical stress-strain curve to find the material parameter that minimizes the difference (objective function) between the experimental and analytical results. This optimization problem is mathematically formulated as the minimization problem of the objective function using the nonlinear least squares method. The purpose of this paper is to provide the framework for estimating the material parameters of the subloading surface model more efficiently and reliably by applying the material parameters estimation model, and to contribute to the future development of material design and simulation technology.

Key Words : elastoplastic mechanics, nonlinear material model, subloading surface model, parameter optimization, finite element method, finite element analysis, computer aided engineering

1. 緒言

材料挙動を正確に予測することは構造設計および製造プロセスの最適化において不可欠である。特に、材料定数の適切な推定は有限要素解析 (FEA) の結果の精度を左右する重要な要素である。

下負荷面モデルは弾塑性構成式の1つであり、降伏面の内部においても塑性変形を考慮したモデルである。下負荷面モデルは応力が降伏面に近づくにつれて塑性変形が発達するという考え方を導入し、以下のような特徴を有する。

1. 降伏面の内部での弾塑性挙動：従来の古典的な弾塑性モデルでは降伏面に達するまで塑性ひずみは発生しないが、下負荷面モデルでは材料の応力レベルが低い場合でも塑性ひずみが発生する。
2. 正規降伏面と下負荷面：降伏面の内部に「下負荷面」を定義し、正規降伏面に対する比率（正規降伏比 R ）を用いて弾塑性の状態を表現することで、弾性から塑性への滑らかな遷移が得られる。
3. 繰り返し負荷への対応：応力レベルが低い場合での塑性ひずみを考慮できるため、繰り返し負荷時の塑性ひずみの蓄積を適切に表現できる。これは金属工学および地盤工学の解析において有用である。

この下負荷面モデルには古典的なモデルに比べて「推定すべき材料定数が多い」という課題がある。例えば、正規降伏比 R の発展則などの材料定数が必要となるため、実験結果から適切な値を決定することが難しい場合がある。

本論文では、弾塑性材料の下負荷面モデルに焦点を当て、汎用シミュレーションソフトウェア COMSOL Multiphysics[®]を用いた新たな材料定数の推定モデルを構築する。今回の推定モデルでは実験結果の応力-ひずみ曲線に可能な限り一致するような下負荷面モデルの材料定数を求める。

材料定数の推定方法としては実験結果と解析結果を比較して、その差（目的関数）を最小化するような材料定数を繰り返し更新する最適化アルゴリズムを用いる．この最適化問題は目的関数を非線形最小二乗法の最小化問題として数学的に定式化される．

さらに、材料定数の推定モデルをアプリケーション化することで、より効率的かつ信頼性の高い下負荷面モデルの材料定数の推定の枠組みを提供し、材料設計とシミュレーション技術の発展に寄与することを目的とする．

2. 下負荷面モデルの詳細

下負荷面モデルでは従来の弾塑性モデルより、降伏面と相似する下負荷面、弾性コア面及び弾性コア限界面が導入されている．各面におけるテンソル値変数は図1が示しているようになる． σ が応力テンソル、 σ_y が下負荷面上の応力 σ に対する降伏面上の共役応力テンソル、 c が弾性コア（相似中心）の位置テンソル、 α が背応力テンソル、 $\bar{\alpha}$ が背応力テンソル α に対する下負荷面の共役応力テンソルとする． \bar{n} と \hat{n} がそれぞれ主応力空間における下負荷面と弾性コア面の単位面方向テンソルとなる．また、 $\bar{\sigma} \equiv \sigma - \bar{\alpha}$ 、 $\bar{\sigma} \equiv \sigma - c$ 、 $\hat{c} \equiv c - \alpha$ と置き換える．

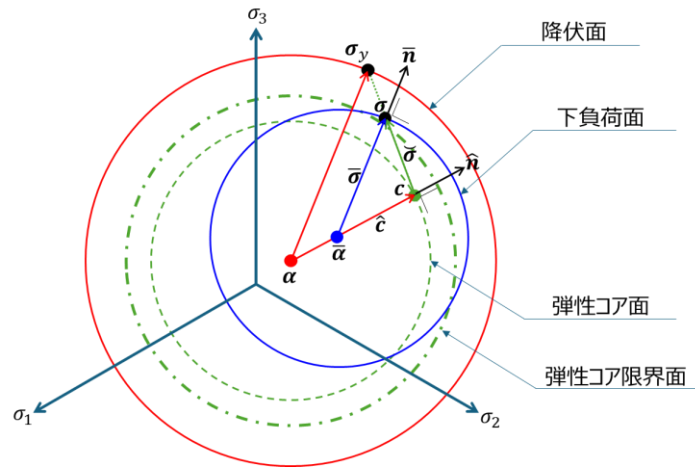


Figure 1 The subloading surface model in principal stress space

下負荷面は降伏面に対する相似性があるため、 $f(\bar{\sigma}) = RF(H)$ 、 $f(\sigma - \bar{\alpha}) = RF(H)$ ($0 \leq R \leq 1$) となる．時間導関数を求めると、

$$\frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} : \dot{\bar{\sigma}} - \frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} : \dot{\bar{\alpha}} - \dot{R}F - R\dot{F} = 0 \quad (1)$$

となる． $f(\bar{\sigma})$ を同次関数とすると、 $\frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} : \bar{\sigma} = f(\bar{\sigma}) = RF$ となるため、 $\frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{RF}{\bar{n} : \bar{\sigma}} \bar{n}$ の関係が得られる．これを式(1) に代入して整理する．

$$\bar{n} : \dot{\bar{\sigma}} - \bar{n} : \left[\dot{\bar{\alpha}} + \frac{\dot{R}}{R} \bar{\sigma} + \frac{\dot{F}}{F} \bar{\sigma} \right] = 0 \quad (2)$$

さらに、図1が示している相似関係 $c - \bar{\alpha} = R(c - \alpha)$ を用いると、 $\bar{\alpha} = c - Rc + R\alpha$ となり、 $\bar{\alpha}$ の時間導関数を求めると、 $\dot{\bar{\alpha}} = \dot{c} - \dot{R}c - R\dot{c} + R\dot{\alpha} + \dot{R}\alpha = \dot{c}(1 - R) + R\dot{\alpha} - \dot{R}c$ となる．この $\dot{\bar{\alpha}}$ を式(2) に代入すると以下の式が得られる．

$$\bar{n} : \dot{\bar{\sigma}} - \bar{n} : \left[\frac{\dot{F}}{F} \bar{\sigma} + R\dot{\alpha} + (1 - R)\dot{c} + \frac{\dot{R}}{R} \bar{\sigma} \right] = 0 \quad (3)$$

今回の金属解析用の下負荷面弾塑性モデルにおいては、Voce 則・式(4) と Armstrong-Frederick 則・式(5) を使用する．

$$F = F_0 \{1 + S_r [1 - \exp(-C_H H)]\} \quad (4)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{2}{3} C_k \dot{\epsilon}_p - \gamma_k \dot{\epsilon}_p \alpha \quad (5)$$

弾性コアの移動については参考文献 [1] の発展則を使用する.

$$\dot{\mathbf{c}} = C_e \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p - \frac{\Re_c}{\chi} \hat{\mathbf{n}} \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p\| \right) = C_e \left(\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p\| \bar{\mathbf{n}} - \frac{\Re_c}{\chi} \hat{\mathbf{n}} \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p\| \right) = \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p\| C_e \left(\bar{\mathbf{n}} - \frac{\Re_c}{\chi} \hat{\mathbf{n}} \right) = \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p\| \mathbf{f}_c \quad (6)$$

ここで, $\Re_c = f(\hat{\mathbf{c}})/F(H)$ となります. R の発展則については参考文献 [2] の

$$\dot{R} = U_a \exp(U_b \Re_c C_e) \cot \left(\frac{\pi \langle R - R_e \rangle}{2 \frac{1 - R_e}{1 - R}} \right) \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p\| = U \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p\| \quad (7)$$

を適用する. 式(4), (6), (7) を式 (3) に代入すると,

$$\bar{\mathbf{n}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\mathbf{n}} : \left[\frac{F'}{F} f_H \bar{\boldsymbol{\sigma}} + R \mathbf{f}_k + (1 - R) \mathbf{f}_c + \frac{U}{R} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \right] \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p\| = 0 \quad (8)$$

異方性を考慮しない問題において, 弾性変形によって生じる応力はヤング率 E とポアソン比 ν を変数とする 4 階の弾性テンソル $\mathbb{E}(E, \nu)$ を用いて, $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$ と表せる.

ここで, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$ が弾性ひずみ速度であり, 全ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 及び塑性ひずみ速度 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ との加算関係 ($\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$) を利用すると,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \mathbb{E} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) \quad (9)$$

と書き換えられる. 従って, 式(9)を式(8)に代入すると,

$$\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p\| = \frac{\bar{\mathbf{n}} : \mathbb{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\bar{\mathbf{n}} : \mathbb{E} : \bar{\mathbf{n}} + \bar{\mathbf{n}} : \left[\frac{F'}{F} f_H \bar{\boldsymbol{\sigma}} + R \mathbf{f}_k + (1 - R) \mathbf{f}_c + \frac{U}{R} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \right]} \quad (10)$$

塑性ひずみ速度は以下のように求まり, 応力速度とひずみ速度の関係は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p &= \frac{\bar{\mathbf{n}} : \mathbb{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\bar{\mathbf{n}} : \mathbb{E} : \bar{\mathbf{n}} + \bar{M}^p} \bar{\mathbf{n}}, \quad \bar{M}^p = \bar{\mathbf{n}} : \left[\frac{F'}{F} f_H \bar{\boldsymbol{\sigma}} + R \mathbf{f}_k + (1 - R) \mathbf{f}_c + \frac{U}{R} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \right] \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbb{E} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) = \mathbb{E} : \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\bar{\mathbf{n}} : \mathbb{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\bar{M}^p + \bar{\mathbf{n}} : \mathbb{E} : \bar{\mathbf{n}}} \bar{\mathbf{n}} \right) \Rightarrow \mathbb{E} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\mathbb{E} : \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}} : \mathbb{E}}{\bar{M}^p + \bar{\mathbf{n}} : \mathbb{E} : \bar{\mathbf{n}}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\mathbb{E} - \frac{\mathbb{E} : \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}} : \mathbb{E}}{\bar{M}^p + \bar{\mathbf{n}} : \mathbb{E} : \bar{\mathbf{n}}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (11)$$

以下の表 1 にて, 上記の式とそれぞれの材料定数との対応関係を示す.

Table 1 Correspondence between setting parameters and model formula

材料定数	式	説明	材料定数	式	説明
EL	E	ヤング率 [Pa]	POI	ν	ポアソン比
$F0$	F_0	初期降伏応力 [Pa]	Re	R_e	R の発展則
CH	C_H	等方硬化, Voce 則	UA	U_a	R の発展則
Sr	S_r	等方硬化, Voce 則	UB	U_b	R の発展則
Ck	C_k	移動硬化, Armstrong-Frederick 則 [Pa]	Ce	C_e	弾性コアの移動 [Pa]
Bk	γ_k	移動硬化, Armstrong-Frederick 則	Kai	χ	弾性コアの移動

3. 下負荷面モデルの材料定数の推定方法

下負荷面モデルの材料定数の推定は以下の手順で進める.

1. COMSOL Multiphysics®でのモデル作成

実験データ (引張と圧縮の単軸試験の結果) の応力-ひずみ曲線 ($\sigma_{\text{exp}}^{(i)}, \varepsilon_{\text{exp}}^{(i)} (1 \leq i \leq n)$) を用意する.

COMSOL Multiphysics®にて実験データ ($\sigma_{\text{exp}}^{(i)}, \varepsilon_{\text{exp}}^{(i)}$) を読み込み, 単軸試験の試験片を模擬した解析モデルを作成する.

2. 数値的最適化によるフィッティング

解析モデルに実験データのひずみ $\varepsilon_{\text{exp}}^{(i)}$ を与え, 下負荷面モデルによる弾塑性解析から応力 $\sigma_{\text{COMSOL}}^{(i)}(\boldsymbol{\theta})$ を得る. ただし, $\boldsymbol{\theta}$ は材料定数(の集合)とする.

実験結果 $\sigma_{\text{exp}}^{(i)}$ と COMSOL Multiphysics®の解析結果 $\sigma_{\text{COMSOL}}^{(i)}(\boldsymbol{\theta})$ を比較して、その差を表す目的関数 $J(\boldsymbol{\theta})$ を以下のように設定して、最小二乗法にて材料定数 $\boldsymbol{\theta}$ を推定する。

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \|\sigma_{\text{exp}}^{(i)} - \sigma_{\text{COMSOL}}^{(i)}(\boldsymbol{\theta})\|^2, \boldsymbol{\theta}_{\text{opt}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} J(\boldsymbol{\theta}) \quad (12)$$

この最適化計算を繰り返して、目的関数 $J(\boldsymbol{\theta})$ を最小化する最適な材料定数 $\boldsymbol{\theta}_{\text{opt}}$ が得られる。ただし、今回の弾塑性解析は微小変形問題とする。

さらに、このモデルを COMSOL Multiphysics®のアプリケーションビルダーにてアプリケーション化する。これにより、COMSOL Multiphysics®の操作を知らない方でも下負荷面モデルの材料定数の推定が可能になる。

4. 材料定数の推定モデルのアプリケーション化とその結果

今回推定する材料定数は5パラメーター(初期降伏応力、Voce 則、 R の発展則)から、最大で10パラメーター(初期降伏応力、Voce 則、Armstrong-Frederick 則、 R の発展則、弾性コアの移動)を可能にした。

アプリケーションの画面(図2-左図)と推定した材料定数による応力-ひずみ曲線のフィッティング結果(図2-右図)を以下に示す。実験結果と推定結果とで両者の応力は良好に一致した。

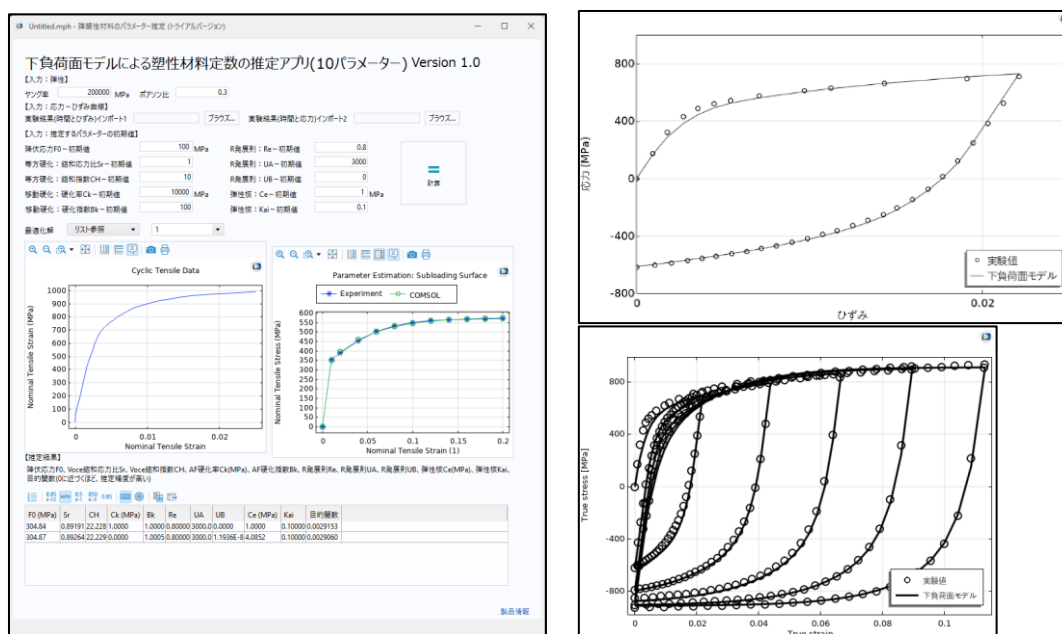


Figure 2 Application screen created with COMSOL Multiphysics® and estimated stress-strain curve

5. 結 語

COMSOL Multiphysics®にて開発したアプリケーションによって、下負荷面モデルの材料定数の推定が可能になった。これにより、下負荷面モデルの理論の理解、および、COMSOL Multiphysics®の操作を知らない方でも下負荷面理論の材料定数の推定を可能にした。

今後は、材料定数の推定のさらなる精度向上、材料定数の推定時間の短縮、アプリケーションの操作性の改善などの課題があるため、引き続き取り組んでいきたい。

本論文を執筆するにあたり、九州大学名誉教授の橋口公一先生から多くのご支援をいただきました。厚く御礼を申しあげます。

文 献

- (1) K. Hashiguchi, "Foundations of elastoplasticity: subloading surface model", First Edition, *New York Springer*, 2017.
- (2) K. Hashiguchi, "Foundations of elastoplasticity: subloading surface model", Fourth Edition, *New York Springer*, 2024.